ATOMI, DADI E FOGLIO ELETTRONICO.
AVVIO ALLA PROBABILITÀ IN UNA QUINTA GINNASIO

DOMINGO PAOLA[1]

SOMMARIO

In questo lavoro si presenta un'esperienza didattica svolta in una quinta ginnasio sperimentale nell'a.s. 1995/1996. L'obiettivo dell'attività è quello di riprendere, da un punto di vista differente, il concetto di probabilità già affrontato da molti alunni nella scuola media ed elementare. L'argomento trattato è la descrizione del decadimento radioattivo mediante un modello non deterministico con l'aiuto dell'elaboratore elettronico. Gli studenti, al momento di iniziare l'attività, conoscevano i principali elementi di statistica descrittiva univariata.

Il presente lavoro si propone come esempio di possibile attività didattica volta a favorire la riflessione sul concetto di probabilità nel contesto di un corso di matematica, sia esso tradizionale o sperimentale.

INTRODUZIONE

Le cause delle difficoltà che si riscontrano nell'approccio risolutivo a problemi probabilistici sono molteplici e di diversa tipologia. Determinanti, per la frequenza e la persistenza degli errori, sono senza dubbio:

a) l'intersezione fra termini utilizzati nel linguaggio quotidiano e in quello probabilistico. Si pensi, per esempio, alla confusione che possono determinare i termini *probabile, possibile, previsione, casuale, evento, eventi indipendenti* qualora vengano utilizzati nel linguaggio probabilistico con le connotazioni e denotazioni con cui possono essere utilizzati nel linguaggio quotidiano.

b) Un'euristica erronea, fondata su idee preesistenti fortemente radicate. Alcuni esempi: la credenza che la successione 1 - 2 - 3 - 4 - 5 in un'estrazione del gioco del lotto sia meno probabile della sequenza 34 - 20 - 1 - 12 - 85; la convinzione che ottenere, con una moneta non truccata, un 80% di teste sia probabile tanto in un piccolo numero di lanci, quanto in un elevato numero di lanci; il ritenere che dopo una lunga successione di teste ottenute nel lancio di una moneta non truccata, sia più probabile l'uscita di croce; il pensare che la congiunzione di due eventi correlati sia più probabile della realizzazione dei singoli eventi [Garfield, 1995].

[1]Liceo classico - scientifico "G. Bruno" Albenga

c) Un insegnamento scolastico che predilige la proposta di problemi in condizioni di certezza e la trattazione di situazioni secondo l'inferenza deduttiva.
d) L'intrinseca difficoltà dei concetti fondamentali per la trattazione dei problemi probabilistici. Basti solo pensare al concetto di casualità, irriducibile a un contesto puramente empirico, o a un contesto esclusivamente matematico, ma trattabile solo attraverso la costante la presenza di entrambi [Steinbring, 1991].
e) L'effetto ombra che provoca il contesto, che induce a differenti valutazioni di probabilità anche in problemi formalmente identici.
f) Sia un problema classico, sia uno probabilistico possono essere pensati come proposizioni in cui figurano dati e incognite che sono da esplicitarsi in funzione dei dati, attraverso la riformulazione del problema in proposizioni equivalenti fino ad arrivare a quella che esplicita la soluzione. Diversamente da un problema classico, però, ogni problema realmente probabilistico esige una *valutazione di probabilità* da parte del solutore in base alle informazioni possedute.
Queste prime osservazioni hanno esclusivamente lo scopo di evidenziare che il problema di individuare un approccio che possa effettivamente favorire la nascita di un corretto pensiero probabilistico è intrinsecamente complesso e richiede, per essere affrontato con speranza di successo almeno parziale, competenze diversificate (psicopedagogiche, linguistiche, matematiche). Il presente lavoro si propone come esempio di possibile attività didattica volta a favorire la riflessione sul concetto di probabilità nel contesto di un corso di matematica, sia esso tradizionale o sperimentale. Trattandosi di semplice esempio, il contributo al problema di cui prima si è detto è del tutto marginale e quindi certamente non risolutivo, anche se potrebbe risultare significativo in quanto esempio paradigmatico di possibili attività, o almeno così mi auguro.

UN ESEMPIO DI ATTIVITÀ DIDATTICA

Questo lavoro è stato svolto in una quinta ginnasio di diciotto studenti (che segue un corso PNI solo in matematica) durante l'a.s. 1995-1996, dopo aver trattato i primi elementi di statistica descrittiva univariata, allo scopo di riprendere, da un punto di vista differente il concetto di probabilità già affrontato da molti alunni nel corso della scuola elementare e media.
Il problema che ho proposto è stato quello di fornire una descrizione del decadimento radioattivo.
L'approccio al problema può essere sostanzialmente di due tipi: deterministico o probabilistico [Guala, 1981; Pugliese Iona, 1992].

Nel primo caso, considerando una massa di N nuclei di un dato radionuclide (con N *sufficientemente* grande), si suppone che il numero dei nuclei che decadono nell'unità di tempo sia direttamente proporzionale al numero dei nuclei presenti. In termini formali, detto ΔN il numero di nuclei decaduti nell'intervallo di tempo di ampiezza Δt e N il numero dei nuclei presenti all'istante t, si ottiene:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -kN \qquad (1)$$

essendo k una costante non negativa che dipende dal particolare isotopo radioattivo considerato.
Il problema si riduce quindi a determinare la classe di funzioni $N = N(t)$ che soddisfano l'equazione (1).
E' chiaro che la funzione cercata è una funzione a gradini, che assume solamente valori interi e quindi o è costante (k=0) o è discontinua (k non nullo). Poiché, però, abbiamo supposto che il numero di nuclei sia elevato, possiamo sostituire alla funzione cercata $N = N(t)$ una sua approssimazione che sia continua e derivabile, diciamo $x = x(t)$. Passando allora al limite per Δt che tende a 0, si ottiene l'equazione differenziale del primo ordine:
$x'(t) = -kx(t)$ la cui soluzione è del tipo $x(t) = x(0)e^{-kt}$, essendo $x(0)$ il valore di $x = x(t)$ per $t = 0$.
In altri termini, $x(0)$ è il valore $N(0)$, ossia il numero di nuclei all'istante in cui abbiamo iniziato a osservare il decadimento.
Un approccio di tale tipo richiede, per poter essere apprezzato, conoscenze che non sono in generale possedute da studenti di quinta ginnasio; anche per tale motivo si è optato per il secondo approccio, quello di carattere probabilistico. In tal caso, tra l'altro, è possibile mettere meglio in evidenza la natura intrinsecamente aleatoria del processo di decadimento radioattivo e si fornisce un'interpretazione più *diretta* della costante k.
Inizialmente ho descritto in classe brevemente l'idea dell'esperimento. Si tratta di osservare il numero di nuclei di un isotopo radioattivo che decadono, nell'unità di tempo, a partire da un certo istante $t = 0$.
Si determinano intervalli di tempo di ampiezza costante Δt e si osservano, mediante opportuni rilevatori di particelle, come varia il numero di nuclei nel tempo; si tratta, in altri termini, di compilare una tabella del tipo seguente:

t	0	1	2	3	....
N	$N(0)$	$N(1)$	$N(2)$	$N(3)$	....

dove $N(0)$ rappresenta il numero di nuclei presenti all'istante 0; $N(1)$ si ottiene sottraendo dal numero di nuclei $N(0)$ il numero di nuclei decaduti nel primo intervallo di tempo; $N(2)$ si ottiene sottraendo a

$N(1)$ il numero di nuclei decaduti nel secondo intervallo di tempo... e così via. Tutti gli intervalli di tempo hanno ampiezza costante Δt (considerata unitaria in tabella).

In mancanza di campioni radioattivi e di rilevatori di particelle adeguati, è possibile simulare il fenomeno notando che:

- è assimilabile a una prova aleatoria, il cui esito può essere schematizzato con una scelta binaria del tipo 0 (il decadimento non si verifica) oppure 1 (il decadimento si verifica).
- La probabilità di decadimento può essere considerata costante, una volta che si siano fissati l'isotopo radioattivo oggetto di studio e l'ampiezza Δt dell'intervallo di tempo.
- Sullo stesso modello si basa il gioco *lancio di un dado simmetrico a* n *facce*.

Possiamo quindi simulare il decadimento stabilendo (a priori) che dopo ogni lancio simultaneo di N dadi (che rappresentano il numero di nuclei del radionuclide) si sarebbero eliminati tutti quelli che presentano una determinata faccia, per esempio la faccia contrassegnata con il numero 5 (se n è maggiore o uguale a 5). Il numero del lancio rappresenta il numero d'ordine dell'intervallo di tempo di ampiezza Δt considerato. E' chiaro che a ogni lancio successivo il numero di dadi diminuisce, essendo eliminati (decadendo) tutti quelli con la faccia numero 5. Il numero n di facce consente di individuare la probabilità di uscita di una singola faccia che, per la simmetria postulata, è $\frac{1}{n}$. Possiamo immaginare che la variazione del numero di facce, ossia di n, simuli il variare dell'isotopo radioattivo oggetto di studio.

L'assenza di un laboratorio attrezzato per l'uso ci ha suggerito di aggirare il problema di costruire fisicamente i dadi; la presenza di un laboratorio di informatica ci ha suggerito di aiutarci con l'elaboratore elettronico per simulare il lancio di un dado di n facce. Si è stabilito, inizialmente, di considerare il classico dado a 6 facce.

Abbiamo scelto di utilizzare il foglio elettronico Lotus 123, già noto agli studenti dalla quarta ginnasio.

Gli studenti hanno lavorato in gruppi composti da due / tre unità. Il ruolo che ho sostenuto in una prima fase è stato quello di coordinatore della ricerca; in tale fase ho quindi discusso con i vari gruppi strategie risolutive, suggerito di prendere in considerazione o di analizzare criticamente strade scelte da altri gruppi. In una seconda fase, quella di sistematizzazione, ho assunto l'impegno di legittimare risultati e conoscenze raggiunti dai vari gruppi.

Gli studenti hanno accettato senza porsi molti problemi la scelta del dado per simulare il decadimento radioattivo. Non so se ciò sia avvenuto perché hanno sentito la scelta naturale. Sono possibili almeno altre due ipotesi:

- hanno accettato più che altro l'autorità dell'insegnante, che ha suggerito il tipo di simulazione. Questa accettazione passiva sarebbe però in contrasto con l'atteggiamento attivo e propositivo tenuto dagli studenti nella conduzione dell'esperienza.
- Gli studenti inizialmente non avevano una sufficiente comprensione del decadimento radioattivo. In tal caso il dado, più che costituire un modello del decadimento, ha fornito significato al fenomeno che si voleva studiare.

Non ho avviato indagini volte a stabilire quale delle tre ipotesi fatte sia da considerare più probabile. Posso solo dire che quasi tutti gli studenti avevano accennato alla radioattività nella scuola media e tutti ne avevano sentito parlare in ambienti extrascolastici. Prima di avviare l'esperienza mi sono limitato a legittimare quelle che, fra le diverse conoscenze sulla radioattività in possesso degli studenti, potevano essere adeguate alla caratterizzazione del fenomeno. Penso che un'attenta analisi delle difficoltà incontrate dagli studenti per collegare simulazione del dado e modello del decadimento radioattivo possa essere interessante a livello di attività di ricerca didattica.

LA STRUTTURAZIONE DEL FOGLIO DI LAVORO

Abbiamo stabilito di strutturare il foglio di lavoro nella seguente maniera:

1) inserire nella prima colonna i risultati del primo lancio di dadi;
2) inserire nella seconda l'elenco dei possibili esiti (1,2,3,4,5,6);
3) inserire nella terza le frequenze assolute dei vari esiti;
4) stabilire il numero di dadi rimasti, dato dalla sottrazione fra il numero di dadi di partenza e la frequenza assoluta dell'esito *è uscita la faccia contrassegnata con il numero cinque*;
5) ripetere le operazioni descritte ai punti 1),2),3),4) fino a che si ottiene un numero di dadi inferiore a 60.

Alla fine dei vari lanci abbiamo costruito una tabella del tipo (l, $N(l)$), riportante la variazione del numero di dadi rimasti in funzione del numero d'ordine del lancio. Tale tabella simula quella (t, $N(t)$), che riporta la variazione del numero di nuclei rimasti in funzione del tempo trascorso. Infine abbiamo rappresentato i dati della tabella con un diagramma cartesiano XY. Abbiamo stabilito di partire con 600 dadi. Dopo aver disinserito il ricalcolo automatico del foglio con le seguenti istruzioni da menù, "Foglio/Globale/Ricalcolo/Manuale" abbiamo così operato:

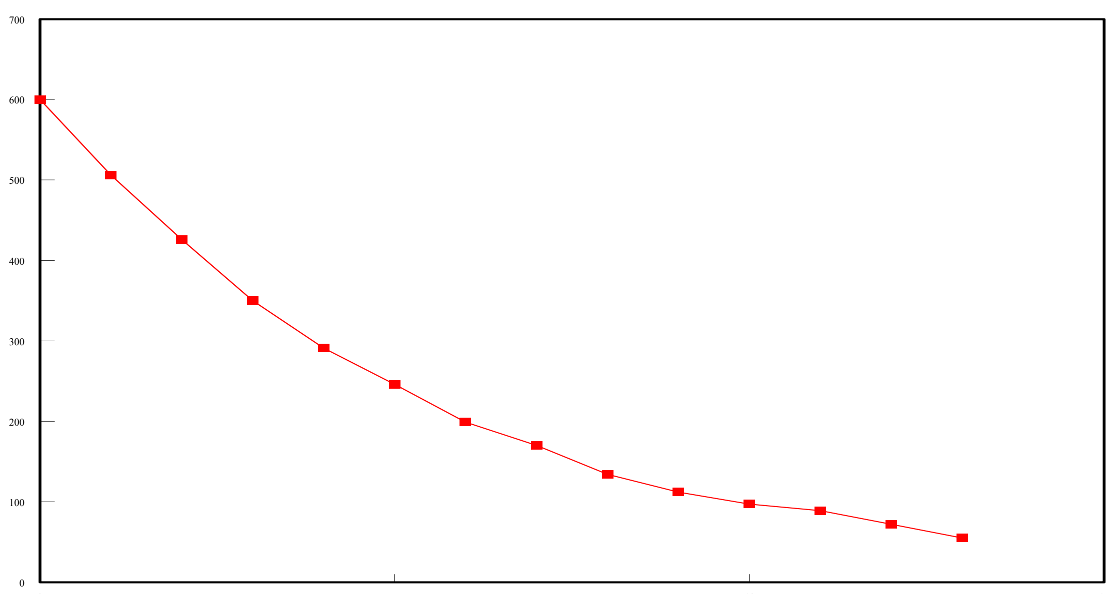
la prima colonna è stata costruita con l'istruzione @INT(@CAS*6+1) inserita nella cella A2. Quindi si è copiata tale istruzione fino alla cella A601. La seconda colonna è stata redatta semplicemente digitando i 6 possibili risultati a partire da B2 fino a B7. La terza colonna è stata ottenuta con la seguente successione di comandi da menù:

Dati/Frequenza, scegliendo poi come zona di valori A2..A601 e come zona di confronto B2..B6.

Ecco la riproduzione della tabella ricomposta con *Word* da uno dei gruppi di lavoro, riportante il numero ΔN di dadi *decaduti* e quello N dei dadi rimasti in funzione del numero d'ordine del lancio l simulato. Le ultime due colonne della tabella riportano, rispettivamente il rapporto $\frac{\Delta N}{N}$ e il valor medio dello stesso.

l	ΔN	N	$\Delta N/N$	media di $\Delta N/N$
0	0	600	indef.	0.16713
1	94	506	0.156667	
2	80	426	0.158103	
3	76	350	0.178404	
4	59	291	0.168571	
5	45	246	0.154639	
6	47	199	0.191057	
7	29	170	0.145729	
8	36	134	0.211765	
9	22	112	0.164179	
10	15	97	0.133929	
11	8	89	0.082474	
12	17	72	0.191011	
13	17	55	0.236111	

Il grafico ottenuto è risultato una *buona riproduzione* di parte di una curva esponenziale:



Il valore medio di $\Delta N/N$ moltiplicato per 100 , circa 16.7, rappresenta il numero di dadi che mediamente decadono in ogni lancio di 100 dadi; al valore $\Delta N/N$ possiamo assegnare il significato di *probabilità* che un dado ha di decadere in un lancio.

A questo punto è possibile introdurre il concetto di *costante di dimezzamento* che in tal caso rappresenta il numero di lanci necessari a far sì che il numero di dadi si sia ridotto della metà rispetto al valore iniziale. Come si può osservare dalla tabella, al quarto lancio si ha il numero di dadi più vicino a 300, ossia alla metà del numero iniziale di dadi . Si può anche notare che $\Delta N/N$ è *abbastanza vicino* alla probabilità teorica 1/6=0.16(6) che ha la faccia numero 5 di presentarsi e che quindi ha un dado di decadere. Ci si può aspettare che all'aumentare del numero di dadi iniziali $\Delta N/N$ si stabilizzi intorno al valore 1/6.

Alcuni studenti hanno voluto cercare di confermare quest'ipotesi e hanno aumentato il numero iniziale di dadi; altri hanno suggerito l'idea di fare una media dei valori $\Delta N/N$ ottenuti dai vari gruppi di lavoro; due gruppi hanno invece preferito effettuare altre prove con un *diverso isotopo radioattivo* e hanno quindi modificato il numero di facce del dado.

Nella seconda fase del lavoro, cui prima facevo riferimento, mi sono imposto il compito di legittimare la correttezza di certe intuizioni degli studenti e di criticarne altre. E' stata un'occasione per riprendere in esame criticamente il modello, sottolineando che:

- la regolarità con cui avvengono le disintegrazioni radioattive è legata all'elevato numero di nuclei iniziale (e qui il modello difetta, non potendosi scegliere, per problemi di tempo di calcolo numeri eccessivamente grandi di dadi) e alla costanza della probabilità di disintegrazione, fissata l'ampiezza dell'intervallo di tempo e l'isotopo radioattivo (qui il modello funziona meglio);
- se il fenomeno nel suo complesso è caratterizzato da una certa regolarità, il decadimento di ogni singolo nucleo (l'eliminazione di ogni dado) è fenomeno intrinsecamente casuale: non possiamo prevedere la sorte di ogni singolo dado, mentre possiamo fare previsioni affidabili sulle modalità di decadimento di un elevato numero di dadi;
- la costante k può essere interpretata come la probabilità di decadimento in un intervallo di tempo unitario (anche se bisogna fare le debite precisazioni nel caso in cui la vita media del campione radioattivo risulti molto minore dell'unità di tempo scelta).

Oggetto di discussione (animata) sono state alcune delle credenze cui si è fatto cenno nel punto b) citato in apertura di questo lavoro. In particolare gli studenti di un gruppo hanno voluto sperimentare che cosa succede se il numero di dadi iniziali diminuisce notevolmente e hanno effettuato qualche prova partendo da 60 dadi e fermandosi quando il numero diveniva minore di 10. In tal modo hanno potuto sperimentare la maggiore variabilità dei piccoli campioni rispetto ai grandi campioni (fatto che poteva anche essere evidenziato osservando le tabelle compilate dai vari gruppi). La tendenza a ritenere che piccoli campioni siano altrettanto rappresentativi quanto quelli più numerosi è stata osservata da vari autori, in particolare da [Kahneman & Tversky, 1972; Shauhnessy, 1983] che hanno coniato il nome di "Representativeness".

Gli studenti mi hanno poi coinvolto in una serie di questioni sorte all'interno dei gruppi di lavoro e riguardanti l'analisi probabilistica delle uscite al gioco del lotto e al totocalcio. La discussione sulle differenze e analogie delle due situazioni è stata meno sistematica di quella riguardante l'esperimento descritto in questo lavoro, ma penso che abbia avuto un forte impatto sugli studenti, proprio perché si è discusso su problemi che essi stessi hanno sollevato. Ho quindi potuto seminare alcune 'provocazioni' (per esempio: la sequenza 1 - 2 - 3 - 4 - 5 ha tante probabilità di uscire al gioco del lotto quante ne ha una qualunque altra cinquina prefissata; oppure: la probabilità di ottenere croce dopo quattro teste, se la moneta non è truccata, è sempre 0.5) su un terreno fertile.

Sono state inoltre gettate le basi per:

- un'introduzione della curva esponenziale;
- una futura trattazione della stessa situazione mediante un modello deterministico cui si è fatto precedentemente cenno e che potrà essere integrato da un approccio di tipo probabilistico proprio per la determinazione della costante di decadimento k;
- un futuro confronto dell'esperienza svolta con gli esperimenti di Rutherford e Geiger nei primi anni del nostro secolo [Bellone, 1990 pp. 299-300]. Mediante un sistema di rilevazione Rutherford e Geiger individuarono il numero di particelle α emesse in intervalli di tempo regolari Δt, ottenendo tabelle del tipo seguente [Cerasoli & Tomassetti 1987, p. 3]

a	0	1	2	3	....	$\geq$ 12
B	57	203	383	525		2

dove a rappresenta il numero di particelle emesse e B la frequenza assoluta dell'evento *nell'intervallo di tempo fissato* Δt *sono state emesse* a *particelle*. Ciò che si ottiene, assumendo alcune ipotesi *ragionevoli*, quali l'indipendenza, l'omogeneità e la regolarità [Cerasoli & Tomassetti, 1987, pp. 5-6] è un tipico processo Poissoniano. In altri termini, si studia la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria che conta il numero di particelle emesse nell'intervallo di tempo [0, t) ottenendo, sotto le ipotesi prima esplicitate la distribuzione $P(N(t)=n)= e^{-\lambda t}(\lambda t)^n / n!$ con $n = 0, 1, 2,....$

CONCLUSIONI

Vi sono vari fattori che ostacolano la costruzione di schemi razionali per gestire situazioni aleatorie. Non sempre l'azione didattica è volta a far nascere consapevolezza di tali fattori e a creare le condizioni per il loro superamento. Io ritengo che attività che

- portino gli studenti a fare esperimenti in prima persona
- favoriscano il confronto in piccoli gruppi
- favoriscano la produzione di congetture, anche utilizzando strumenti informatici
- portino gli studenti alla costruzione di modelli probabilistici,

siano particolarmente utili per avviare alla rimozione di quegli ostacoli di cui si è detto e per preparare il terreno all'accettazione del pensiero probabilistico.

BIBLIOGRAFIA

Bellone E.: 1990, Caos e armonia, Utet, Torino.

Cerasoli M.& Tomassetti G.: 1987, Statistica, Zanichelli, Bologna.

Garfield J.: 1995, Come gli studenti imparano la statistica, in *Induzioni*, 11, pp. 29-44.

Guala E.: 1981, Modelli deterministici e modelli stocastici, Istituto di Matematica Università di Genova.

Kahneman D.& Tversky A.: 1972, Subjective Probability: A Judgement of Representativeness, in *Cognitive Psychology*, 3, pp. 430-454.

Pugliese Iona S.: 1992, Modelli dinamici e radioattività. Proposte per un'attività didattica utilizzante l'elaboratore elettronico, in *La fisica nella scuola*, Anno XXV, 1.

Shaughnessy J. M: 1977, Misconception of probability: an experiment with a small-group, activity-based model building approach to introductory probability at the college level, in *Educational Studies in Mathematics*, 8, pp. 295-316.

Steinbring H.: 1991, The theoretical Nature of Probability in the classroom, in R.Kapadia and M. Borovcnick (eds), *Chance Encounters: Probability in Education*, Kluver Academic Publischers, Netherlands, pp. 135-167

Zanetti V.: 1990, Percorsi di fisica, Zanichelli, Bologna.